

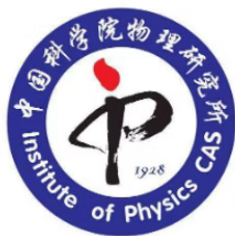
第一届“天目杯”理论物理冬令营 竞赛试题（含参考答案）

冬令营竞赛命题组

2025 年 1 月 17 日

答题须知：

1. 试卷共 7 题，总分 140 分。答卷时间 180 分钟。
2. 答题完毕后请交还试卷、答卷、与全部草稿。
3. 计算结果必须使用题干所给出的参数和物理量表达。
4. 答案应书写在答卷纸上。书写在其他位置不得分。



1 矢量场的积分 (10 分)

已知三维空间矢量场 $\vec{F} = (x^2y + z)\hat{x} + (2xy^2 + 2z)\hat{y} + (3z^2 - x^3)\hat{z}$ ，其中 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 是三个相互正交的单位矢量， $\hat{z} = \hat{x} \times \hat{y}$ 。S 为上半球面 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 。C 为 S 的边界，取向如图 1.1 所示。

(1) (5 分) 计算曲线积分 $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ，其中 $d\vec{r} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$ 。

解：(1) 首先将曲线 C 的参数方程写出来，C 为 $x^2 + y^2 = 4 (z = 0)$ ，即

$$x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad z = 0, \quad (0 \leq t < 2\pi). \quad (1.1)$$

取微分形式得

$$dx = -2 \sin t dt, \quad dy = 2 \cos t dt, \quad dz = 0. \quad (1.2)$$

矢量场 \vec{F} 可以写成参数 t 的函数如下：

$$\vec{F} = (4 \cos^2 t \cdot 2 \sin t)\hat{x} + (2 \cdot 2 \cos t \cdot 4 \sin^2 t)\hat{y} + (-8 \cos^3 t)\hat{z}. \quad (1.3)$$

对其进行积分得：

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (-16 \cos^2 t \sin^2 t + 32 \cos^2 t \sin^2 t) dt = 4\pi. \quad (1.4)$$

备注：计算结果正确，给 5 分；计算结果差一个系数或者符号，但思路清晰，给 3 分；否则不得分。

(2) (5 分) 利用斯托克斯公式验证上述结果。

解法一：选取半球底面为积分面。根据斯托克斯公式

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\vec{S}} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}, \quad (1.5)$$

先求旋度：

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y + z & 2xy^2 + 2z & 3z^2 - x^3 \end{vmatrix} = -2\hat{x} + (3x^2 + 1)\hat{y} + (2y^2 - x^2)\hat{z}. \quad (1.6)$$

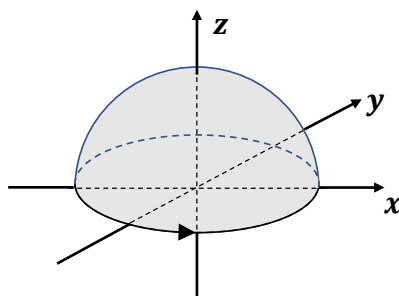


Figure 1.1: 第 1 题积分曲线 C 示意图

利用

$$d\vec{S} = dydz \hat{x} + dzdx \hat{y} + dxdy \hat{z}, \quad (1.7)$$

得到标量积分元:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = -2dydz + (3x^2 + 1)dzdx + (2y^2 - x^2)dxdy. \quad (1.8)$$

取 \tilde{S} 为平面 $z = 0$ 上半径 $r = 2$ 的圆, 利用极坐标变换:

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad dxdy = r dr d\phi, \quad (1.9)$$

在圆 $r = 2$ 内积分:

$$\boxed{\iint_{\tilde{S}} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^2 r dr (2r^2 \sin^2 \phi - r^2 \cos^2 \phi) = \pi \int_0^2 r^3 dr = 4\pi.} \quad (1.10)$$

解法二: 选取半球上表面为积分面。取 \tilde{S} 为上半球面, 利用球坐标变换:

$$x = \rho \sin \theta \cos \phi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \phi, \quad z = \rho \cos \theta, \quad (1.11)$$

得到

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = -2\hat{x} + (3\rho^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + 1)\hat{y} + \rho^2 \sin^2 \theta (2\sin^2 \phi - \cos^2 \phi)\hat{z} \quad (1.12)$$

和

$$d\vec{S} = (\sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}) \rho^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (1.13)$$

在 $\rho = 2$ 的上半球面积分:

$$\begin{aligned} & \iint_{\tilde{S}} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} \\ &= \rho^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \left[\cancel{-2 \sin \theta \cos \phi} + \cancel{\sin \theta \sin \phi (3\rho^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + 1)} + \cos \theta \rho^2 \sin^2 \theta (2\sin^2 \phi - \cos^2 \phi) \right] \\ &= \rho^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \cos \theta \sin^2 \theta (2\sin^2 \phi - \cos^2 \phi) \\ &= \rho^4 \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \cos \theta \sin^2 \theta = 4\pi. \end{aligned} \quad (1.14)$$

【编后】出这道题的目的是考查基础数学知识与计算技能。矢量场和积分是极为基础的数学工具。设置这道题并非要为难学生, 而是旨在考查学生是否跨越了最低的知识门槛。毕竟, 理论物理是一门高度依赖数学计算的学科。

2 磁场中的极性分子 (20 分)

水分子、氟化氢等极性分子携带电偶极矩。本题研究一个约束在二维平面内的极性分子的运动。我们采用如图 2.1 所示的简化模型来描述极性分子：两个电荷量分别是 $\pm q$ 的点电荷被一个刚性棒连接，棒的长度为 d ，分子质心位于正负电荷的几何中心，整个分子躺在 xOy 面内。分子的总质量为 M ，绕 z 轴的转动惯量为 I 。为了表示分子的位置和指向，令质心坐标为 (x, y) ，负电荷指向正电荷的矢量与 x 轴的夹角为 θ 。沿着 z 方向存在一个匀强磁场 B 。

(1) (5 分) 已知一个电量为 q 的带电粒子与磁场的耦合通过如下拉氏量描述：

$$L = L_0 + q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}). \quad (2.1)$$

其中 L_0 为无外磁场情况下粒子的拉氏量。 \vec{r} 为粒子的坐标， \vec{A} 为矢量势： $A_x = 0, A_y = Bx$ 。写下题干所述极性分子模型的拉氏量 L ，结果用质心坐标 x, y, θ 与对应的时间导数 $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}$ 表达。

解：分子中正负电荷的坐标分别为：

$$x_{\pm} = x \pm \frac{d}{2} \cos \theta; \quad y_{\pm} = y \pm \frac{d}{2} \sin \theta. \quad (2.2)$$

与磁场的耦合为：

$$q\dot{y}_+ A_y(x_+) - q\dot{y}_- A_y(x_-) = qB(x_+\dot{y}_+ - x_-\dot{y}_-) = qBd(\dot{y} \cos \theta + x \cos \theta \dot{\theta}). \quad (2.3)$$

体系的总拉氏量为：

$$L = \frac{M}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{I}{2}\dot{\theta}^2 + qBd(\dot{y} \cos \theta + x \cos \theta \dot{\theta}). \quad (2.4)$$

注意：拉氏量添加一个时间全导数不影响运动方程。利用这一性质，上述拉氏量可以进一步整理为：

$$L' = \frac{M}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{I}{2}\dot{\theta}^2 + qBd(\dot{y} \cos \theta - \dot{x} \sin \theta). \quad (2.5)$$

(2) (2 分) 通过欧拉-拉格朗日方程得到极性分子的运动方程。

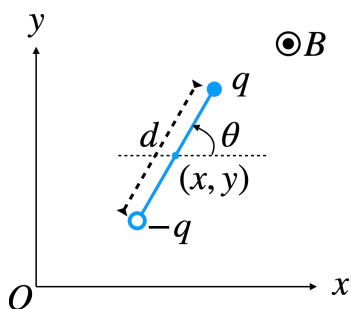


Figure 2.1: 第 2 题极性分子模型示意图

解：先计算欧拉-拉格朗日方程所涉及的各项导数：

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= M\dot{x}; & \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= M\dot{y} + qBd \cos \theta; & \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= I\dot{\theta} + qBdx \cos \theta; \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= qBd \cos \theta \dot{\theta}; & \frac{\partial L}{\partial y} &= 0; & \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -qBd(x\dot{\theta} \sin \theta + \dot{y} \sin \theta). \end{aligned} \quad (2.6)$$

运动方程为：

$$\boxed{M\ddot{x} = qBd \cos \theta \dot{\theta}; \quad M\ddot{y} = qBd \sin \theta \dot{\theta}; \quad I\ddot{\theta} = -qBd(\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta).} \quad (2.7)$$

- (3) (3分) 通过给 $M\dot{x}$, $M\dot{y}$ 各自适当添加一项，构造出两个守恒量 P_x 与 P_y (本题中称之为称臆动量)。

解： x 与 y 的运动方程可以整理为：

$$\frac{d}{dt}(M\dot{x} - qBd \sin \theta) = 0; \quad \frac{d}{dt}(M\dot{y} + qBd \cos \theta) = 0. \quad (2.8)$$

从运动方程可看出所寻求的守恒量：

$$\boxed{P_x = M\dot{x} - qBd \sin \theta; \quad P_y = M\dot{y} + qBd \cos \theta.} \quad (2.9)$$

另解：通过观察整理过的拉式量 L' ，可知 x 与 y 均为循环坐标，从而直接推断出其共轭动量为守恒量。

- (4) (5分) 给定臆动量 $P_x > 0, P_y = 0$ 的条件下，当且仅当分子指向角 θ 取一些特殊值 θ_0 时，分子质心做匀速直线运动。求所有的 θ_0 和对应的分子质心速度 \dot{x}, \dot{y} 。

解：在给定臆动量的前提下，分子质心速度与指向角的关系为：

$$\dot{x} = \frac{P_x + qBd \sin \theta}{M}; \quad \dot{y} = \frac{-qBd \cos \theta}{M}. \quad (2.10)$$

匀速直线运动意味着 θ 不随时间变化。此时 θ 运动方程右边应为 0：

$$\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta = \frac{P_x \cos \theta}{M} = 0. \quad (2.11)$$

求得两个可能的解：

$$\boxed{\theta_0 = \pm \frac{\pi}{2}; \quad \dot{x} = \frac{P_x \pm qBd}{M}; \quad \dot{y} = 0.} \quad (2.12)$$

- (5) (5分) 在上一问所求得的 θ_0 中，哪一个对小扰动是稳定的？此时，如果外界对 θ 施加一个小扰动， θ 将以频率 ω 振动。求 ω 。

解： θ 的运动方程为：

$$I\ddot{\theta} = -\frac{qBdP_x}{M} \cos \theta. \quad (2.13)$$

令 $\theta = \theta_0 + \delta\theta$ ，并展开到 $\delta\theta$ 的第一阶：

$$I\ddot{\delta\theta} = \frac{qBdP_x}{M} \sin \theta_0 \delta\theta. \quad (2.14)$$

稳定性要求：

$$\sin \theta_0 < 0. \quad (2.15)$$

可以看出只有解：

$$\boxed{\theta_0 = -\frac{\pi}{2}}, \quad (2.16)$$

符合条件。此时振动频率为：

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{qBdP_x}{IM}}}. \quad (2.17)$$

【编后】 本题设计灵感来自于低维半导体中的激子。这里为了简化问题，将激子替换为了极性分子。通过构造拉式量来分析物理系统是理论物理研究的常用方法。本题通过激子/极性分子这个例子来演示理论力学方法是如何用到研究工作中去的。在完成了经典力学的分析之后，人们可以进一步通过正则量子化方法，研究激子/极性分子的量子性质。欢迎大家尝试。

3 冬季采暖的热力学（15分）

冬季采暖可以使用热泵，它从低温热源吸热，向高温热源放热，同时做功。假设一台理想热泵对一座建筑物室内供暖，其功率（单位时间做的功）为 P ，并使用温度为 T_0 的建筑外空气作为低温热源。同时，建筑物单位时间向外界损失的热量为 $\alpha(T - T_0)$ ， $\alpha > 0$ 为一常数， T 为建筑物室内温度。

(1) (5分) 热泵单位时间向建筑物室内供热是多少？

解：将热泵看作逆向运行卡诺热机，建筑物室内为高温热源，室外空气为低温热源。其工作效率为：

$$\frac{W}{Q} = \frac{T - T_0}{T}, \quad (3.1)$$

这里 W 是对工质做的功， Q 是对高温热源放热。已知单位时间对工质做的功是 P ，那么单位时间向建筑物供热为：

$$\boxed{\frac{T}{T - T_0} P}. \quad (3.2)$$

(2) (5分) 热泵开启后一段时间，建筑物室内将达到恒定温度 T_e 。求 T_e 。

解：稳定条件为热泵供热与热损失相等：

$$\frac{T}{T - T_0} P = \alpha(T - T_0). \quad (3.3)$$

上述一元二次方程有两个解。舍弃不合理的解，得到：

$$\boxed{T_e = T_0 + \frac{P}{2\alpha} + \sqrt{T_0 \frac{P}{\alpha} + \left(\frac{P}{2\alpha}\right)^2}}. \quad (3.4)$$

(3) (5分) 该建筑也可以用功率为 P 的电加热器采暖。求此时建筑物室内的恒定温度 T'_e ，并依此说明电加热采暖效果不如热泵。

解：稳定条件为：

$$P = \alpha(T - T_0). \quad (3.5)$$

解出稳定温度：

$$\boxed{T'_e = T_0 + \frac{P}{\alpha}}. \quad (3.6)$$

注意到

$$\boxed{T_e = T_0 + \frac{P}{2\alpha} + \sqrt{T_0 \frac{P}{\alpha} + \left(\frac{P}{2\alpha}\right)^2} \geq T_0 + \frac{P}{2\alpha} + \sqrt{\left(\frac{P}{2\alpha}\right)^2} = T'_e}. \quad (3.7)$$

等号在 $T_0 = 0$ 取到。同等功率下，使用热泵供热，建筑物恒定温度更高。因此热泵更有优势。

【编后】本题改编自一道经典的热力学习题。本题的旨趣在于演示热力学与我们日常生活息息相关。

4 轴子电动力学 (25 分)

轴子是一种假想的基本粒子。作为暗物质的可能组分，轴子是宇宙学和粒子物理学的重要研究对象。凝聚态物理中，一些物质的理论模型与轴子的理论模型高度类似。本题探讨轴子对电磁场的影响。理论家通过一个实标量场 $\alpha(\mathbf{r})$ 描述轴子，其中 α 为实数， \vec{r} 为空间坐标。真空中的轴子场可修正电场高斯定律和安培定律（方程采用自然单位。在此单位制下，真空中的光速与真空介电常数均为 1）：

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho - \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \alpha; \quad (4.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \dot{\vec{E}} + \vec{j} - \vec{E} \times \vec{\nabla} \alpha. \quad (4.2)$$

$\alpha(\vec{r})$ 为不随时间演化的轴子场。 \vec{E} 是电场强度， \vec{B} 是磁感应强度。电磁学的其它基本定律不受影响。

- (1) (5 分) 写出场 $\alpha(\vec{r})$ 在时间反演（时间 $t \rightarrow -t$ ）、空间反演（坐标 $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ ）操作下的变换规则，从而保证电磁学基本定律满足时间与空间反演对称性。

解：已知电荷密度在时间与空间反演操作下均不变。观察修正过的电场高斯定律，可知 $\nabla \alpha$ 与 B 变换性质相同。在时间反演下 B 变号，因此 α 也变号；在空间反演下 ∇ 变号，因此 α 也变号。

- (2) (10 分) 如图 4.1 所示， $z > 0$ 半空间中均匀分布着轴子场： $\alpha(\vec{r}) = \alpha_0 > 0$ ； $z < 0$ 的半空间中无轴子。类比常规电动力学在介质界面处的连接条件，写下 $z = 0$ 处 \vec{E} 与 \vec{B} 各分量的连接条件。

解：常规电动力学的电场高斯定律

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \quad (4.3)$$

可推出电场的界面法向分量连续。注意到修正后的电场高斯定律可以写作：

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} + \alpha \vec{B}) = \rho. \quad (4.4)$$

因此， $\vec{E} + \alpha \vec{B}$ 的法向分量连续。类似地，常规电动力学的安培定律

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \dot{\vec{E}} + \vec{j}, \quad (4.5)$$

可推出磁场的界面切向分量连续。注意到修正后的安培定律可以写作：

$$\vec{\nabla} \times (\vec{B} - \alpha \vec{E}) = \dot{\vec{E}} + \alpha \dot{\vec{B}} + \vec{j}. \quad (4.6)$$

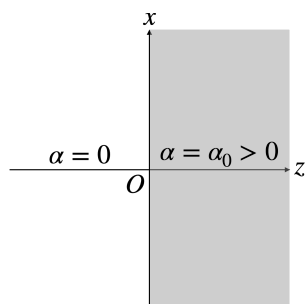


Figure 4.1: 第 4 题轴子场分布示意图。

因此， $\vec{B} - \alpha\vec{E}$ 的界面切向分量连续。将上述条件运用到题设情形，得到（5分）：

$$\begin{cases} E_z(z=0^+) + \alpha_0 B_z(z=0^+) = E_z(z=0^-); \\ B_x(z=0^+) - \alpha_0 E_x(z=0^+) = B_x(z=0^-); \\ B_y(z=0^+) - \alpha_0 E_y(z=0^+) = B_y(z=0^-). \end{cases} \quad (4.7)$$

由于磁场高斯定律和法拉第定律不受影响，因此 \vec{B} 的法向分量连续， \vec{E} 的切向分量连续。用之于题设情形，得到（5分）：

$$\begin{cases} E_x(z=0^+) = E_x(z=0^-); \\ E_y(z=0^+) = E_y(z=0^-); \\ B_z(z=0^+) = B_z(z=0^-). \end{cases} \quad (4.8)$$

- (3) (5分) 轴子场分布同图 4.1。 $z < 0$ 半空间中存在均匀电磁场： $\vec{E} = E_0\hat{x}$ ， $\vec{B} = B_0\hat{z}$ 。求 $z > 0$ 半空间中的 \vec{E} 和 \vec{B} 。

解：在 $z > 0$ 半空间，由于轴子场均匀分布，麦克斯韦方程与常规真空中麦克斯韦方程一致。因此， $z > 0$ 处只可能存在均匀分布的静电场和静磁场。设其各分量分别为 $E_{x,y,z}$ 和 $B_{x,y,z}$ 。运用连接条件：

$$\begin{cases} B_x - \alpha_0 E_x = 0; \\ B_y - \alpha_0 E_y = 0; \\ E_z + \alpha_0 B_z = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} E_x = E_0; \\ E_y = 0; \\ B_z = B_0. \end{cases} \quad (4.9)$$

解出：

$$\begin{cases} E_x = E_0; \\ E_y = 0; \\ E_z = -\alpha_0 B_0. \end{cases} \quad \begin{cases} B_x = \alpha_0 E_0; \\ B_y = 0; \\ B_z = B_0. \end{cases} \quad (4.10)$$

- (4) (5分) 轴子场分布同图 4.1。频率为 ω ，极化方向为 x 的平面电磁波沿着 z 方向自 $z < 0$ 半空间入射。电场分布为 $\vec{E}(z) = E_0\hat{x} \cos(\omega(z-t))$ 。透射到 $z > 0$ 半空间的电磁波的极化矢量将发生偏转，求偏转方向和偏转角度 θ 。

解：由于 $z \neq 0$ 处均满足常规麦克斯韦方程，因此平面电磁波解与常规情形相同。设 $z < 0$ 半空间的电磁场分布为：

$$\vec{E} = E_0\hat{x} \cos(\omega(z-t)) + \vec{E}_R \cos(\omega(z+t)); \quad \vec{B} = E_0\hat{y} \cos(\omega(z-t)) - \hat{z} \times \vec{E}_R \cos(\omega(z-t)). \quad (4.11)$$

这里 $\vec{E}_R \perp \hat{z}$ 为反射波的波幅。设 $z > 0$ 半空间的电磁场分布为：

$$\vec{E} = \vec{E}_T \cos(\omega(z-t)); \quad \vec{B} = \hat{z} \times \vec{E}_T \cos(\omega(z-t)). \quad (4.12)$$

这里 $\vec{E}_T \perp \hat{z}$ 为透射波的波幅。在 $z = 0$ 处运用连接条件：

$$E_0\hat{x} + \vec{E}_R = \vec{E}_T; \quad E_0\hat{y} - \hat{z} \times \vec{E}_R = \hat{z} \times \vec{E}_T - \alpha_0 \vec{E}_T. \quad (4.13)$$

对第二式两边叉乘 \hat{z} ，得到：

$$-E_0 \hat{x} + \vec{E}_R = -\vec{E}_T - \alpha_0 \hat{z} \times \vec{E}_T. \quad (4.14)$$

与第一式相减，得到：

$$E_0 \hat{x} = \vec{E}_T + \frac{\alpha_0}{2} \hat{z} \times \vec{E}_T. \quad (4.15)$$

上述方程的解为：

$$\vec{E}_T = \frac{E_0}{1 + \alpha_0^2/4} \left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \hat{z} \times\right) \hat{x} = E_0 \frac{\hat{x} - \alpha_0/2 \hat{y}}{1 + \alpha_0^2/4}. \quad (4.16)$$

可见，透射电磁波的极化矢量向 $-y$ 方向偏转，偏转角度为：

$$\theta = \arctan \frac{\alpha_0}{2}. \quad (4.17)$$

【编后】 本题改编自轴子、多铁体系、与拓扑绝缘体研究的经典论文，主要考查参赛者对电动力学中连接条件的理解与灵活运用。本题也说明本科阶段的基础知识在前沿研究中会扮演重要角色。

5 球面上的螺旋电子态 (20 分)

三维拓扑绝缘体的表面存在螺旋电子态。如果表面是一个无限大的 xy 平面，那么电子哈密顿量由下式给出：

$$H = \lambda(\vec{\sigma} \times \vec{p}) \cdot \hat{z}, \quad (5.1)$$

其中 $\lambda > 0$ 是自旋轨道耦合强度， \hat{z} 是 xy 平面的法向。 $\vec{\sigma}$ 由三个泡利矩阵组成的三维向量， \vec{p} 是限制在 xy 平面上的动量。

现在考虑一个球形的拓扑绝缘体，其半径为 R 。本题研究该表面上的螺旋电子态。定义位置矢量 $\vec{R} = (x, y, z)$ 和对应的单位矢量 $\hat{R} = \vec{R}/R$ 。本题使用自然单位 $\hbar = 1$ 。

(1) (5 分) 论证球面上的电子动量可以用 $\vec{p} = -i[\vec{\nabla} - \hat{R}(\hat{R} \cdot \vec{\nabla})]$ 表示。

解：将三维动量 \vec{p}_{3D} 减去其垂直于球面的分量得到球面上动量：

$$\vec{p} = \vec{p}_{3D} - \hat{R}(\hat{R} \cdot \vec{p}_{3D}) = -i[\vec{\nabla} - \hat{R}(\hat{R} \cdot \vec{\nabla})]. \quad (5.2)$$

(2) (5 分) 球面上螺旋电子态的哈密顿量可以表示成三维轨道角动量 \vec{L} 和自旋的耦合。写出其具体形式。

解：将公式 (5.1) 中的 \hat{z} 替换成 \hat{R} ，得到球面形式：

$$H = \lambda \hat{R} \cdot (\vec{\sigma} \times \vec{p}) = -\lambda \vec{\sigma} \cdot (\hat{R} \times \vec{p}). \quad (5.3)$$

将球面上的动量代入其中，得到

$$\hat{R} \times \vec{p} = \hat{R} \times [\vec{p}_{3D} - \hat{R}(\hat{R} \cdot \vec{p}_{3D})] = \frac{\vec{R}}{R} \times \vec{p}_{3D} = \frac{\vec{L}}{R}. \quad (5.4)$$

因此，球面上的哈密顿量为：

$$H = -\frac{\lambda}{R} \vec{\sigma} \cdot \vec{L}. \quad (5.5)$$

(3) (5 分) 证明总角动量 $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ 是守恒量。这里 $\vec{S} = \vec{\sigma}/2$ 是自旋角动量。

解：由

$$[\vec{L}, R] = 0, \quad [\vec{\sigma}, R] = 0, \quad [\vec{\sigma}, \vec{L}] = 0, \quad (5.6)$$

和

$$[\vec{L}, \vec{\sigma} \cdot \vec{L}] = i\vec{\sigma} \times \vec{L}, \quad [\vec{\sigma}, \vec{\sigma} \cdot \vec{L}] = -2i\vec{\sigma} \times \vec{L}, \quad (5.7)$$

得到

$$[\vec{J}, H] = -\frac{\lambda}{R} \left[\vec{L} + \frac{1}{2} \vec{\sigma}, \vec{\sigma} \cdot \vec{L} \right] = 0. \quad (5.8)$$

因此， \vec{J} 是守恒量。

- (4) (5 分) 求本题第 (2) 问中哈密顿量的能级和简并度，使用轨道角动量 \vec{L} 对应的量子数 l 来表达 (\vec{L}^2 的本征值是 $l(l+1)$)。

答：因为 \vec{J} 是守恒量，其对应的角动量量子数 j 和 j_z 是好量子数。计算

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{L} = \left(\vec{L} + \frac{1}{2} \vec{\sigma} \right)^2 - \vec{L}^2 - \frac{1}{4} \vec{\sigma}^2 = \vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \frac{3}{4}, \quad (5.9)$$

的本征值得到：

$$j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}. \quad (5.10)$$

考虑角动量的合成规则

$$j = \begin{cases} \frac{1}{2}, & l = 0, \\ l \pm \frac{1}{2}, & l = 1, 2, 3, \dots, \end{cases} \quad (5.11)$$

得到能量本征值和简并度如下：

$\begin{aligned} j = l + \frac{1}{2}: & E_{l+} = -\frac{2\lambda l}{R}, & \text{简并度是 } 2j + 1 = 2l + 2; \\ j = l - \frac{1}{2}: & E_{l-} = \frac{2\lambda(l+1)}{R}, & \text{简并度是 } 2j + 1 = 2l. \end{aligned}$	(5.12)
--	--------

【编后】 该题源自于命题人 2016 年的一篇论文开篇部分（实际上，应当存在更早的相关文献），其目的在于考察量子力学的一些基本概念。第一小题主要考察理解能力，只要回答合理，即可得满。后面部分的考察内容涵盖守恒量的概念、对易关系的计算、角动量耦合的基本知识等。另外，在比赛颁奖后的交流环节中，一位荣获特优奖的同学提出了一个有趣的问题：为何原本平面系统的能谱具有粒子 - 空穴对称性，而在球面上却不具备这种对称性？这实际上涉及到球面曲率额外引入了一个等效磁单极子的问题。我很高兴有同学能指出这个颇具深度的问题，期待若干年后他能成为我们探索自然的同道。

6 一维杂质散射（25 分）

真实材料中无处不在的杂质对微观粒子的传播行为有着显著影响。在一维和二维，安德森提出了任意有限浓度的杂质，都将导致所有单粒子态的局域化，从而抑制宏观尺度的输运现象，即“安德森局域化”。本题通过一维简化模型，复现安德森局域化理论中的一些关键步骤。

如图 6.1 所示，考虑一维空间中运动的质量为 m 的粒子，其量子力学哈密顿量为：

$$H = -\frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x), \quad (6.1)$$

这里 $V(x) > 0$ 为原点附近宽度为 2σ 的对称势垒：

$$V(x) = V(-x), \quad V(|x| \geq \sigma) = 0. \quad (6.2)$$

假设从左侧入射的波数为 $k > 0$ 的粒子，存在如下的定态散射解：

$$\psi(x < -\sigma) = e^{ikx} + re^{-ikx}, \quad (6.3a)$$

$$\psi(x > \sigma) = te^{ikx}. \quad (6.3b)$$

其中 $r \neq 0$ 。本题中 t, r, k 均作为已知量，且满足 $|t|^2 + |r|^2 = 1$ ，可以用来表达结果。

- (1) (10 分) 如图 6.2 所示，现于原势垒右侧加入一与之完全相同的势垒，两个势垒之间的距离为 $l \gg \sigma$ 。若已知从左侧入射的波数为 $k > 0$ 的粒子存在定态散射解：

$$\psi(x < -\sigma) = e^{ikx} + Re^{-ikx}, \quad (6.4a)$$

$$\psi(x > l + 3\sigma) = Te^{ikx}. \quad (6.4b)$$

求透射振幅 T 的表达式（用 r, t, k, l 表达）。

解：穿过第二个势垒的透射波，由下列过程叠加而成：

1. 第一势垒透射，第二势垒透射；
2. 第一势垒透射，第二势垒反射，第一势垒反射，第二势垒透射；
3. 第一势垒透射，第二势垒反射，第一势垒反射，第二势垒反射，第一势垒反射，第二势垒透射；
- ...
- n. 第一势垒透射，（第二势垒反射，第一势垒反射） $n-1$ ，第二势垒透射；

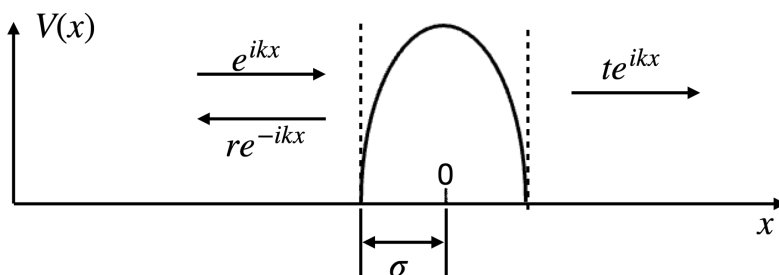


Figure 6.1: 第 6 题单个势垒的定态散射示意图。

...
 这些过程对应的概率幅可以分别计算，得

$$\begin{aligned} T_1 &= t^2, \\ T_2 &= tre^{ikl}re^{ikl}t, \\ &\dots \\ T_n &= t(re^{ikl}re^{ikl})^{n-1}t, \\ &\dots \end{aligned} \tag{6.5}$$

观察可知， $\{T_n|n = 1, 2, \dots\}$ 为等比数列，利用求和公式，得

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} T_n = \frac{t^2}{1 - r^2 e^{2ikl}}. \tag{6.6}$$

(2) (5分) 以势垒之间的距离 l 为变量，透射率 $|T(l)|^2$ 的极大值是多少？取到极大值时的条件是什么？(用 k, l, θ 表达，其中 θ 是复数 r 的相位)。

解：由公式 (6.6) 直接计算，可得

$$|T|^2 = \frac{|t|^4}{|1 - r^2 e^{2ikl}|^2} = \frac{|t|^4}{1 + |r|^4 - 2|r|^2 \cos(2\theta + 2kl)}. \tag{6.7}$$

当

$$kl + \theta = n\pi, \tag{6.8}$$

满足时 (n 为整数)，有 $e^{2ikl+2i\theta} = e^{2n\pi i} = 1$ 。此时

$$|T|^2 = \frac{|t|^4}{(1 - |r|^2)^2} = 1. \tag{6.9}$$

最后一步利用了 $|t|^2 + |r|^2 = 1$ 。因此公式(6.8)是透射率取极大值的充分必要条件，极大值为 1，即全透射。

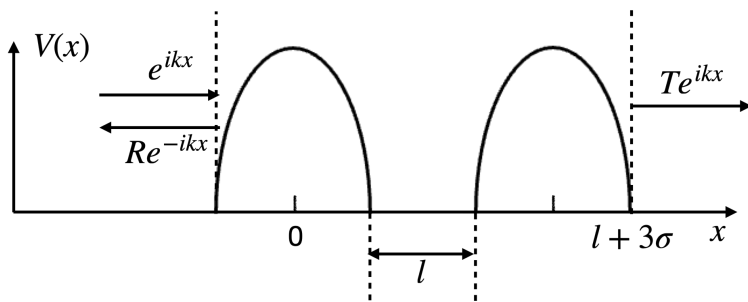


Figure 6.2: 第 6 题双势垒的定态散射示意图。

- (3) (5分) 假设 l 是分布在 $[0, L]$ 之间的随机数, 其概率密度是均匀分布 $\rho(l) = L^{-1}$ 。求 $L \rightarrow \infty$ 的极限下, $|T(l)|^2$ 和 $\log |T(l)|^2$ 的期望:

$$\overline{|T|^2} = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L \rho(l) |T(l)|^2 dl, \quad (6.10)$$

$$\overline{\log |T|^2} = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L \rho(l) \log |T(l)|^2 dl. \quad (6.11)$$

解: 依据题意, 直接计算 $\overline{|T|^2}$

$$\begin{aligned} \overline{|T|^2} &= \frac{|t|^4}{1+|r|^4} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L dl \frac{1}{1 - \frac{2|r|^2}{1+|r|^4} \cos(2\theta + 2kl)} \\ &= \frac{|t|^4}{1+|r|^4} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - \frac{2|r|^2}{1+|r|^4} \cos(2\theta + \phi)} \frac{d\phi}{2\pi} \\ &= \frac{|t|^4}{1+|r|^4} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4|r|^4}{(1+|r|^4)^2}}} \\ &= \frac{|t|^4}{1-|r|^4} = \frac{|t|^2}{1+|r|^2}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

其中第三个等号利用了公式 (6.17)。

透射率对数的期望:

$$\begin{aligned} \overline{\log |T|^2} &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L \{\log[|t|^4] - \log(1 - r^2 e^{2ikl}) - \log(1 - r^{*2} e^{-2ikl})\} \\ &= \int_0^{2\pi} \{\log[|t|^4] - \log(1 - r^2 e^{i\phi}) - \log(1 - r^{*2} e^{-i\phi})\} \frac{d\phi}{2\pi}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

被积函数的第二项、第三项, 在积分之后结果为 0:

$$\int_0^{2\pi} \log(1 - r^2 e^{\pm i\phi}) \frac{d\phi}{2\pi} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n} \int_0^{2\pi} e^{\pm in\phi} \frac{d\phi}{2\pi} = 0. \quad (6.14)$$

其中第一个等号利用了对数函数的级数展开。因此所求期望为:

$$\overline{\log |T|^2} = 2 \log |t|^2. \quad (6.15)$$

- (4) (5分) 考虑 N 个相同的势垒, 相邻势垒之间的距离 $l_{1,2,\dots,N-1}$ 都是均匀分布在 $[0, L]$ 上的随机数。假设从左侧入射的粒子穿过全部势垒的透射振幅为 $T^{(N)}(l_1, \dots, l_{N-1})$ 。根据上一问的结果和物理直觉, 写下 (无需证明) 在 $L \rightarrow \infty$ 极限下, $\log |T^{(N)}|^2$ 的期望。

解: 当只有一个势垒时, 透射率的对数为 $\log |t|^2$, 而上一问结果中有两个势垒时, 总透射率的对数的平均值是 $2 \log |t|^2$ 。因此我们猜测总透射率的对数平均值具有可加性, 当有 N 个势垒时, 我们有透射率的对数

$$\overline{\log |T^{(N)}|^2} = N \log |t|^2. \quad (6.16)$$

【编后】当完成最后一问之后，一维的安德森局域化的核心结论已经近在咫尺：假设杂质的密度为 ρ ，那么波数为 k 的粒子传播距离 x 时，经过了 ρx 个杂质，透射率衰减为 $\exp(\log |t_k|^2 \rho x)$ ，向左传播情况相同。这即是说该粒子被局域在 $|x| < |\rho \log |t_k|^2|^{-1}$ 的范围之内。由于这里 k 是任意的，因此只要 $\rho \neq 0$ 所有的单粒子态都是局域的。

本题中可能需要用到的公式：

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - x \cos \phi} \frac{d\phi}{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad (|x| < 1) \quad (6.17)$$

7 量子多体问题的基态（25 分）

物理学中经常研究多电子系统的量子力学基态。真实多电子系统的基态往往很难计算；但是，对于相互作用形式简单的系统，有时可以直接获得基态波函数。

考虑一维体系中质量均为 m 的三个粒子，它们的坐标和动量分别用 $x_{1,2,3}$ 与 $p_{1,2,3}$ 表示。量子力学哈密顿量写为：

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m} + V(x_1, x_2, x_3). \quad (7.1)$$

这里 $V(x_1, x_2, x_3)$ 表示三个粒子之间的相互作用，具体形式为：

$$V(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}m\omega^2[(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_1 - x_3)^2]. \quad (7.2)$$

(1) (5 分) 证明题干所述哈密顿量的全部本征值可以表达为下式：

$$E(n, P) = \frac{P^2}{6m} + (n+1)\sqrt{3}\hbar\omega. \quad (7.3)$$

其中 $n = 0, 1, 2, \dots$, P 为体系质心的动量。求 $E(n, P)$ 能级的简并度。

解：系统的势能部分，可以用以下矩阵形式写出：

$$V(x_1, x_2, x_3) = \frac{m\omega^2}{2}(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{m\omega^2}{2}(X, u, v) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ u \\ v \end{pmatrix}. \quad (7.4)$$

这里定义了新广义坐标：

$$X = (x_1 + x_2 + x_3)/3, \quad u = (x_1 - x_2)/\sqrt{2}, \quad v = (x_1 + x_2 - 2x_3)/\sqrt{6}. \quad (7.5)$$

其中我们使用了 3×3 矩阵的对角化。特别的， X 是质心坐标。用 X, u, v 写出的哈密顿为：

$$H = \frac{P^2}{6m} + \left[\frac{p_u^2}{2m} + \frac{1}{2}m(\sqrt{3}\omega)^2 u^2 \right] + \left[\frac{p_v^2}{2m} + \frac{1}{2}m(\sqrt{3}\omega)^2 v^2 \right]. \quad (7.6)$$

其中 $p_{u,v}$ 是 u, v 的共轭动量， P 是质心坐标的共轭动量（即总动量）：

$$P = p_1 + p_2 + p_3; \quad p_u = (p_1 - p_2)/\sqrt{2}; \quad p_v = (p_1 + p_2 - 2p_3)/\sqrt{6}. \quad (7.7)$$

注意到公式 (7.6) 中，中括号内的两部分都是简正频率为 $\sqrt{3}\omega$ 的一维谐振子。根据一维谐振子的量子化理论，这两部分的能谱分别是

$$\begin{aligned} E_u &= (n_u + 1/2)\sqrt{3}\hbar\omega, \\ E_v &= (n_v + 1/2)\sqrt{3}\hbar\omega. \end{aligned} \quad (7.8)$$

因此整个哈密顿量的能谱为

$$E(n, P) = \frac{P^2}{6m} + (n+1)\sqrt{3}\hbar\omega, \quad (7.9)$$

其中 $n = n_u + n_v = 0, 1, 2, \dots$ 对于给定的 n ，简并度是 $n+1$ 。如果考虑到 $P \rightarrow -P$ 的简并，那么简并度变为 $2(n+1)$ ，两个答案都算对。

(2) (5 分) 证明对应 $E(n, P = 0)$ 的本征态波函数可写为如下形式:

$$\Psi_n(x_1, x_2, x_3) = P_n(x_1, x_2, x_3)S(x_1, x_2, x_3), \quad (7.10)$$

其中 $P_n(x_1, x_2, x_3)$ 是关于坐标的 n 次多项式, $S(x_1, x_2, x_3)$ 是与 n 无关的函数, 且对 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 的置换保持不变:

$$S(x_1, x_2, x_3) = S(x_2, x_3, x_1) = S(x_3, x_1, x_2) = S(x_2, x_1, x_3) = S(x_1, x_3, x_2) = S(x_3, x_2, x_1). \quad (7.11)$$

解: (n_u, n_v, P) 是可以完全对角化哈密顿量的一组动力学变量完全集, 其描述的量子态波函数为

$$\langle x_1, x_2, x_3 | n_u, n_v, P \rangle = \exp[iP(x_1 + x_2 + x_3)/3] H_{n_u}(u) H_{n_v}(v) \exp[-\sqrt{3}m\omega(u^2 + v^2)/2]. \quad (7.12)$$

任何对应能量 $E(n, P)$ 的本征态, 可以用这一组基线性展开 (以下 $P = 0$):

$$\langle x_1, x_2, x_3 | \Psi_{n, P=0} \rangle = \sum_{n_u, n_v} \delta_{n, n_u + n_v} A_{n_u n_v} H_{n_u}(u) H_{n_v}(v) \exp[-\sqrt{3}m\omega(u^2 + v^2)/2], \quad (7.13)$$

其中 $A_{n_u n_v}$ 是线性组合系数。注意到

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{3}[(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2], \quad (7.14)$$

是关于 $x_{1,2,3}$ 轮换的不变的, 且注意到 $H_{n_u}(u)H_{n_v}(v)$ 是关于 $x_{1,2,3}$ 的 $n = n_u + n_v$ 阶多项式。我们不妨定义

$$P_n(x_1, x_2, x_3) = \sum_{n_u, n_v} A_{n_u n_v} H_{n_u}\left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}\right) H_{n_v}\left(\frac{x_1 + x_2 - 2x_3}{\sqrt{6}}\right); \quad (7.15)$$

$$S(x_1, x_2, x_3) = \exp\left[-\frac{\sqrt{3}m}{2}\omega(u^2 + v^2)\right] = \exp\left\{-\frac{\sqrt{3}\omega}{6}[(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2]\right\}. \quad (7.16)$$

这里很容易看出 $P_n(u, v)$ 中的最高次幂是 $n_u + n_v = n$, 这是因为求和中的每一项中的最高次幂的项正比于 $u^{n_u}v^{n_v}$, 因此不同的 (n_u, n_v) 项中的最高次幂项不会因为求和而消去。最后, 由于从 (u, v, x_c) 到 (x_1, x_2, x_3) 之间是齐次线性变换, 因此 $P_n(u, v)$ 的阶数等于 $P_n(x_1, x_2, x_3)$ 的阶数。结合公式 (7.12) 和公式 (7.16), 本征态的波函数可以表达为

$$\Psi_{n, P=0}(x_1, x_2, x_3) = P_n(x_1, x_2, x_3)S(x_1, x_2, x_3). \quad (7.17)$$

(3) (10 分) 证明当三个粒子为全同玻色子时, 基态能量为:

$$E_G^{(B)} = E(0, 0) = \sqrt{3}\hbar\omega. \quad (7.18)$$

当三个粒子为全同费米子时, 基态能量为:

$$E_G^{(F)} = E(3, 0) = 4\sqrt{3}\hbar\omega. \quad (7.19)$$

写出三个粒子为全同费米子时，基态的波函数（无需归一化），并加以证明。

解：玻色子要求整个波函数对于 $x_{1,2,3}$ 的轮换保持不变。根据上一问结论，这相当于要求 $P_{n_u+n_v}(x_1, x_2, x_3)$ 关于轮换是对称的。不难看出，当 $n_u = n_v = 0$ 时， $P_0(x_1, x_2, x_3)$ 为常数，显然是关于指标轮换是对称的。同时注意到，当 $n_u = n_v = P = 0$ 时，Eq.(7.9) 中的能谱也达到最小值，也就是基态：

$$E_G^{(B)} = E(0, 0) = \sqrt{3}\hbar\omega. \quad (7.20)$$

费米子的多体波函数须具备全反对称性，这相当于要求 $P_n(x_1, x_2, x_3)$ 具有全反对称性。关于三个变量的最低阶全反对称函数是唯一的（除了一个常数因子），阶数为 3。因此猜测

$$P_3(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1). \quad (7.21)$$

既然 n 的最小值为 3，我们猜测基态能量：

$$E_G^{(F)} = E(3, 0) = 4\sqrt{3}\hbar\omega. \quad (7.22)$$

基态波函数为：

$$\Psi_0^{(F)}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) \exp\left\{-\frac{\sqrt{3}\omega}{6}[(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2]\right\}. \quad (7.23)$$

为了证明 $\Psi_0^{(F)}$ 是基态，首先注意到不存在比 $n = 3$ 更低的全反对称多项式，所以只需要证明这是一个本征态。首先注意到 $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$ 可以写成 u, v 的三阶多项式 $f_3(u, v)$ （因为里面不显含 $(x_1 + x_2 + x_3)$ ）。利用厄米多项式的完备性不难证明 u^n 可以写成 $H_{0,\dots,n}(u)$ 的线性组合， v^n 可以写成 $H_{0,\dots,n}(v)$ 的线性组合。因此

$$\begin{aligned} f_3(u, v) = \sum_{i,j \leq 3} C_{ij} H_i(u) H_j(v) &= \sum_{i+j=0} C_{ij} H_i(u) H_j(v) + \sum_{i+j=1} C_{ij} H_i(u) H_j(v) \\ &+ \sum_{i+j=2} C_{ij} H_i(u) H_j(v) + \sum_{i+j=3} C_{ij} H_i(u) H_j(v). \end{aligned} \quad (7.24)$$

接下来注意到不存在全反对称的一阶、二阶的三变量多项式，因此上式中前三项必须为 0，即

$$f_3(u, v) = \sum_{i+j=3} C_{ij} H_i(u) H_j(v), \quad (7.25)$$

满足 Eq.(7.15) 在 $n = 3$ 的一般形式，证毕。

另解：猜出 $\Psi^{(F)}(x_1, x_2, x_3)$ 的波函数后，证明 $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$ 其实是 $H_1(u)H_2(v)$ 和 $H_2(u)H_1(v)$ 的线性组合；或者直接带入哈密顿量验证它是本征态。

(4) (5 分) 现假设共有 N 个费米子，相互作用为：

$$V(x_1, \dots, x_N) = \frac{m\omega^2}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq N} (x_i - x_j)^2, \quad (7.26)$$

（注意当 $N = 3$ 时该相互作用退化为公式 (7.2)）。无需过程和归一化，直接写出体系基态的波函数。

解：根据上述 $N = 3$ 的结果，猜测在 N 个费米子情形，我们有基态波函数

$$\Psi_0^{(F)}(x_1, \dots, x_N) = \prod_{i \neq j=1}^N (x_i - x_j) \exp\left[-\frac{\omega}{2\sqrt{N}} \sum_{i < j}^N (x_i - x_j)^2\right]. \quad (7.27)$$

最后得到的多体费米子基态波函数，形式上看与在谐振子外场下 N 个无相互作用粒子的基态波函数十分类似。由此可见，纯粹的简谐形式相互作用，本质上与无相互作用情形无异。

结果的等价表达式还有：

$$\Psi_0^{(F)}(x_1, \dots, x_N) = \prod_{i \neq j=1}^N (x_i - x_j) \exp\left[-\frac{\sqrt{N}\omega}{2} \sum_i^N (x_i - x_c)^2\right]. \quad (7.28)$$

$$\Psi_0^{(F)}(x_1, \dots, x_N) = \prod_{i \neq j=1}^N (x_i - x_j) \exp\left[-\frac{\sqrt{N}\omega}{2} \left(\sum_i^N x_i^2 - \frac{(\sum_j x_j)^2}{N}\right)\right]. \quad (7.29)$$

本题中可能需要用到的知识：质量为 m ，频率为 ω 的一维谐振子未归一化的本征态波函数为 $H_n(x) \exp(-m\omega x^2/2)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)，其中 $H_n(x)$ 是 n 阶多项式。

【编后】 本题以证明已知的结果为主，因此对证明过程的严谨性的要求比较高，毕竟凑出一个形式简单的结果并不难。本题很多“零分”答案中弄混了题干的情形和一个谐振子外场中放三个粒子的情形，而后者在习题中比较常见。经典力学中的质心运动分离法在处理此问题时并没有太大优势，很容易误解为质心平动加上三个谐振子的情形，而 $x_{1,2,3} - x_c$ 并不是三个独立的变量。最后一问中，如果要严格证明结果，需要的简正坐标的构造跟一维声子的构造方式非常类似，请尝试挑战吧。最后，从 Eq.(7.28) 来看，基态波函数的形式与在谐振子外场下 N 个无相互作用的费米子基态波函数几乎全同，我认为这是平均场近似在二次型相互作用下即为严格解的缘故。